DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS: UN RECORRIDO A TRAVÉS DE LA HISTORIA DESDE UNA VISIÓN SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Cecilia Crespo Crespo

Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*". Buenos Aires (Argentina)

Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN. (México)

crccrespo@gmail.com

Campo de investigación: socioepistemología, pensamiento lógico. Nivel: superior

Palabras clave: socioepistemología, argumentaciones, construcción sociocultural

Resumen

La matemática es reconocida por la socioepistemología como una actividad cultural y por lo tanto es necesario ubicar cada uno de sus conceptos en el escenario cultural en que surgió y se desarrolló. Las demostraciones han sido la manera de validar los conocimientos matemáticos; son, en consecuencia, también construcciones socioculturales. Las condiciones en que se genera un concepto, la manera de pensar de quienes le dieron origen, la finalidad y manera en que fue trabajado y transmitido, cómo era la sociedad en la que se desarrolló, qué intereses tenía, cómo pensaba, qué la preocupaba y muchas otras cuestiones s dan forma al escenario correspondiente. El concepto de demostración matemática no ha sido siempre el mismo, ha evolucionado notablemente a través de la historia. Esta idea se encuentra ligada al escenario sociocultural en que nos ubiquemos variando considerablemente de una cultura a otra.

Introducción

Existe indudablemente una fuerte relación entre la matemática y la lógica. A lo largo de la historia, esta relación no se ha mantenido estática: ha cambiado y evolucionado según las concepciones culturales de cada momento, de cada sociedad. Podría decirse que en la actualidad se presenta a la matemática como la ciencia deductiva por excelencia. Sin embargo, en los últimos años cada vez encontramos menos demostraciones en el aula de matemática, aunque si se investiga qué opinan los especialistas, se ve que la demostración sigue siendo considerada como noción medular en la matemática. En el quehacer matemático surge como indispensable para lograr la comprensión, la capacidad de razonar, no sólo razonar en la ciencia cuya enseñanza nos ocupa sino razonar en situaciones que van más allá de los ámbitos académicos. El concepto de demostración matemática no ha sido siempre el mismo, ha evolucionado notablemente a través de la historia, ligada al escenario sociocultural. Existe acuerdo entre los especialistas en que la matemática griega introdujo como elemento novedoso en la matemática el método deductivo. En la época de los presocráticos, caracterizada por la búsqueda principio de las cosas, se ponen de manifiesto argumentaciones para defender cada postura. Estas ideas marcaron en la forma de pensamiento una ruptura en manera de ver el universo. La razón comenzó de esta manera a reemplazar a los mitos, convirtiéndose a partir de esta época en Grecia en centro y base de todo conocimiento. Sin embargo es posible encontrar conocimientos matemáticos y formas de razonar ligadas a ellos en todas las culturas.

La matemática del cálculo y de las necesidades materiales

En un principio, en la mayoría de las civilizaciones, en matemática se fueron desarrollando algunos aspectos de la geometría y aritmética, con la finalidad de conocer el espacio físico y de realizar en él cálculos y estimaciones que resultaron necesarios. En Egipto y en la

Mesopotamia, la precisión de los cálculos efectuados se probaba por medio de la verificación de los resultados obtenidos. Este sigue siendo en la actualidad un método utilizado para la verificación de resultados de ecuaciones y otros problemas matemáticos. De los documentos que han llegado a la actualidad, se infiere que estos pueblos no estaban interesado en generalizar ni en abstraer los conocimientos que poseían, interesándose sólo por la resolución de problemas prácticos. Algunos especialistas de la historia de la matemática afirman, sin embargo, que "*no se puede sostener que se trata en ambos casos de reglas empíricas a las que se llega mediante un penoso esfuerzo de ensayo y error para problemas específicos, sin ninguna conciencia de una aplicación general*" (Gheverghese, 1991, p.181).

En India, si bien se ha afirmado a veces que las contribuciones importantes son "*acontecimientos episódicos sin continuidad*" (Boyer, 1996, p.270), el desarrollo de la matemática india es notable. Aparecen argumentaciones para explicar resultados, en los Sulvasutras, textos en los que se describen las formas geométricas y orientaciones de los altares con las prescripciones establecidas por los libros sagrados védicos. Se presentan explicaciones de reglas de manera similar a algunos de los teoremas demostrados por Euclides. En períodos posteriores, la matemática india presenta desarrollos de fórmulas para realizar cálculos geométricos y trigonométricos a través de deducciones. En este periodo, algunas afirmaciones geométricas se prueban por referencia a figuras, siendo fundamental entonces en la matemática la exactitud en el trazado de los dibujos, ya que éstos se constituyen en argumentos. Las necesidades prácticas de estos pueblos los llevaron a optar por desarrollar generalmente conocimientos algorítmicos en lugar de buscar una fundamentación de los mismos.

La matemática demostrativa

La influencia de las ideas provenientes de Egipto y Babilonia fue seguramente muy sensible en Mileto, cuna de la filosofía, la matemática y las demás ciencias griegas. Las fuentes escritas de los primeros tiempos de esta cultura no han llegado a nuestros días como las fuentes provenientes de Babilonia y Egipto, a pesar de tratarse de épocas posteriores, en parte debido a la destrucción de importantes bibliotecas. Se considera que en la primera etapa de la "*matemática demostrativa*" de los griegos (Eggers Lan, 1995), éstos creyeron poder y deber demostrar todo. En esta etapa se ubica a Thales de Mileto (Siglo V a.C.), aunque empleando como procedimiento la utilización de regla y compás para demostrar empíricamente propiedades y construcciones. Se trata de una concepción de demostración diferente de la que predominaría posteriormente en la matemática. La idea de demostración a la que hacen referencia se encuentra más cerca de las de argumentaciones que de la de demostración deductiva.

La argumentación literaria y dialéctica en Grecia

La argumentación literaria posee características distintas del mecanismo deductivo, sin embargo es interesante analizar ciertas similitudes, e incluso la aparición en ella de argumentaciones por reducción al absurdo. La lógica argumental se basa en la razonabilidad de la tesis sustentada, pero no podemos decir que este tipo de razonamientos conduzca necesariamente a una conclusión, sino que ésta es aceptada o no por el interlocutor. Parménides compone un poema épico-didáctico destinado a persuadir, en él no pone en juego motivaciones que no surjan por sí solas y utiliza el esquema que Aristóteles menciona como "reducción a lo imposible", o reducción al absurdo: "*Que el ser es, implica que no ha nacido, pero si hubiese nacido significa que previamente no existía el ser, y, en ese caso, tendría que haber nacido de la nada, pero, aparte de que solo puede hablarse de lo que es y no de la nada, ¿qué necesidad le haría pasar de no ser a ser*?" (Citado por Eggers, 1995, p.33.). Esta argumentación utiliza además uno de los principios aristotélicos que es el principio de necesidad.

Por otra parte, es Zenón de Elea, discípulo de Parménides, quien en el siglo V a.C. fue el primero en contrastar una hipótesis con otra y demostrar indirectamente la verdad de una de ellas, al poner de manifiesto el absurdo o imposibilidad de la otra. Zenón propuso una serie de paradojas, algunas de las cuales se referían al movimiento y demostraba que éste no existe.

El arte dialéctico regulaba en Grecia la forma de dialogar de forma racional; se utilizaba el término "dialéctica" para referirse a la situación de comunicación en la que se desarrolla una reflexión crítica sobre la forma de llegar a conclusiones válidas. En todo diálogo existen al menos dos interlocutores contrapuestos, y en la dialéctica se parte de que hay en ellos razones para argumentar.

Los sistemas deductivos en matemática

En la incorporación del método deductivo a la matemática resultó central la intención filosófica de construir una ciencia teórica cuya meta era el conocimiento de la verdad. El objetivo del método deductivo era explicar y explicar era demostrar. La intención filosófica de construir una ciencia a partir de ciertos principios tomados como base, se encuentra claramente descripta en la obra de Aristóteles. Es posible comprender a través de algunos hechos presentes en el escenario griego, el surgimiento de la demostración, en el sentido de un proceso deductivo. Por una parte, la necesidad de resolver la crisis generada por la prueba pitagórica de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado y el deseo de decidir si los resultados legados por anteriores civilizaciones eran ciertos o contradictorios. Por otra parte, la naturaleza de la sociedad griega, en la que se favoreció el desarrollo del saber especulativo, dando gran valor al arte de la argumentación y de la persuasión. Finalmente se tiene el antecedente de la intención pedagógica de los recopiladores del saber geométrico anteriores a Euclides que les llevó a considerar los principios básicos de esta ciencia.

Una de las principales contribuciones griegas a la matemática se refiere a que para ellos todo resultado debía ser establecido deductivamente a partir de un sistema de axiomas. Esta concepción de la manera en que se debían obtener las afirmaciones matemáticas permitía que mediante razonamientos válidos se obtuvieran proposiciones verdaderas al partir de nociones comunes y postulados verdaderos. Las formas válidas de los razonamientos garantizaban de esta manera la veracidad de las afirmaciones de la matemática. La veracidad de los axiomas era garantizada por la evidencia de los mismos. Uno de los logros más importantes de Aristóteles fue la fundamentación de la lógica. Entre los principios o leyes que puso en evidencia, podemos mencionar: el Principio de no contradicción y el Principio del tercero excluido. Estas leyes integran el fundamento sobre el que se edifican las demostraciones indirectas.

La matemática se transformó en la ciencia hipotético-deductiva por excelencia a partir del siglo III a.C., con la aparición de los Elementos de Euclides. La demostración tomó a partir de ese momento el papel de explicación válida, a partir de ciertos primeros principios: axiomas y postulados. Aristóteles había descrito las características de una ciencia demostrativa, Euclides llevó a la práctica esas ideas en el cuerpo de la matemática, combinando la deducción con la intuición geométrica. Durante mucho tiempo, esta obra fue considerada como modelo para cualquier explicación racional.

La evolución de la deducción en matemática

Los silogismos introducidos por Aristóteles serían adoptados por los escolásticos en la Edad Media, que enriquecieron la lógica con numerosos estudios e intentos de formalización aunque acabaron sobrecargando la teoría de los silogismos, lo que produjo su descrédito en el Renacimiento. Los lógicos de la Edad Moderna, procuraron simplificarla y hacia fines del siglo XIX y principios del XX lograron convertirla en un cálculo, al reducir la lógica a operaciones. Desde el punto de vista de la deducción matemática, podemos pensar que tras el avance producido con los Elementos, cambiaron poco las concepciones durante siglos. Quizá una de las actividades principales de los matemáticos en este sentido fueron los intentos infructuosos para demostrar el Quinto Postulado de Euclides, visto como una proposición demasiado compleja para ser considerado en la categoría de postulado, por lo que intentaron demostrarlo a partir de los otros postulados. En el siglo XIX, un suceso importante relacionado con un cambio en la evolución de las ideas de argumentaciones y deducciones matemáticas, fue el surgimiento de las geometrías no euclidianas. El concepto de sistema axiomático se modificó a partir de entonces en cuanto a la no exigencia de que los axiomas sean intuitivamente evidentes. El concepto de verdad cambió desde la aparición de las geometrías no euclidianas radicalmente en la matemática. La verdad dejó de ser absoluta, una propiedad matemática pasó a ser verdadera dentro de un sistema y falsa en otro. El surgimiento de geometrías distintas, amplió la concepción de la matemática poniendo en tela de juicio la necesidad de evidencia de los axiomas propuestos para una teoría.

Hasta el siglo XX, podría decirse que la demostración matemática fue un proceso supuestamente claro e indiscutible. Las demostraciones eran el alma de la matemática, la forma de justificar la validez de sus afirmaciones, de comprobar o refutar sus conjeturas. Los principios de la lógica habían sido sentados por Aristóteles y eran la base sobre la que se construyen los conocimientos matemáticos. A partir de la toma de conciencia de la aparición de paradojas a principios de este siglo, se produjo cierta inseguridad sobre cuáles y cómo son los principios sólidos.

Los logicistas sostuvieron que la matemática es una parte de la lógica y que como tal, puede construirse utilizando solamente procedimientos lógicos. De esta manera, la matemática se reduce a la lógica, es decir que la lógica es el lenguaje que da al conocimiento matemático el carácter formal y permite definir objetos y demostrar teoremas de forma que los únicos resultados matemáticos verdaderos son los que se demuestran mediante un proceso finito lógico-deductivo.

Los intuicionistas adoptaron una posición completamente distinta. Para los intuicionistas, la matemática tiene origen en las dos formas de la intuición pura que enunciara Kant. No pretenden que todo lo evidente deba aceptarse en la matemática, ni que lo que no lo sea deba rechazarse; los fundamentos de la matemática contienen una serie de intuiciones primarias que provienen de la intuición, pero el progreso de esta ciencia consiste en eliminar la intuición de sus razonamientos. Los seguidores de una vertiente del intuicionismo, denominada neointuicionismo, creyeron necesario restringir la aplicación de la ley del tercero excluido en las demostraciones y declararon aceptar únicamente en la categoría de objetos matemáticos aquellos que podían ser construidos y cuyas propiedades podían demostrarse de manera constructiva, por lo que todas aquellas propiedades en cuya demostración era necesaria la aplicación de reducciones al absurdo eran entonces rechazadas. Para estos matemáticos, probar que la negación de cierta afirmación no sea cierta no es equivalente a que la afirmación inicial sea verdadera. Resulta notable al respecto que algunas culturas, como los chinos y los hindúes no utilizaron en su matemática demostraciones por reducción al absurdo, y que en ambos casos desconocían e incluso negaban el principio del tercero excluido.

En 1900 David Hilbert, quien perfeccionó las ideas de Euclides los dos objetivos principales consistían en primero demostrar que la matemática es consistente y completa. Al hablar de demostraciones, método deductivo y sistemas axiomáticos, no puede dejar de mencionarse a Kurt Gödel, cuyo teorema demostró la futilidad de los intentos de reducir la matemática a un mero sistema formal, demostrando que cualquier teoría matemática suficientemente potente, que al menos contenga la aritmética, contiene proposiciones que no pueden ser probadas ni refutadas, es decir contiene afirmaciones indecidibles. En el siglo XX, las posiciones formalistas extremas han exagerado el aspecto sintáctico de los sistemas axiomáticos, en el cual se puso el acento en aspectos sintácticos, en detrimento de los semánticos y de la intuición. La demostración se reduce de esta manera a un procedimiento algorítmico que podría desarrollarse de forma automatizada, incluso mediante el uso de computadoras. En 1976 Kenneth Appel y Wolfgang Haken, matemáticos de la Universidad de Illinois, marcaron un nuevo hito en la historia de la evolución de las demostraciones en matemática, al presentar una demostración realizada con ayuda de una computadora de una conjetura que había ocupado a matemáticos durante muchos años: El problema de los cuatro colores, consistente en demostrar que todo mapa plano puede ser coloreado usando sólo cuatro colores, aceptando que dos regiones que tienen frontera no puntual común no deben tener el mismo color. Appel y Haken redujeron el problema a comprobar que casi 1800 mapas de tipos esencialmente diferentes se podían colorear con cuatro colores; si lo hacían ellos no terminarían en mucho tiempo, programado en una máquina el resultado se consiguió en varios días. Tras esta demostración, han aparecido otras del mismo estilo. La demostración de Appel y Haken provocó una polémica entre los matemáticos acerca de si era o no lícito aceptarla, ya que en ella había sido necesario utilizar otros elementos, aparte de la razón humana, argumentando que aunque se pueda repetir el experimento en varias máquinas no podemos estar seguros de que no se haya cometido un fallo en su diseño de modo que el resultado sea sólo aparentemente correcto.

Indudablemente, la matemática es mucho más que mero encadenamiento deductivo y formal. Aparece además relacionado con ella un proceso creativo, ligado a la formulación de conjeturas, a la presencia de ejemplos y contraejemplos. Durante las últimas décadas la concepción de demostración y de lenguaje para su comunicación, ha ido cambiando notablemente. Muchos son los matemáticos y educadores que consideran en la actualidad que el aspecto deductivo no es el único importante en la matemática, se ha reconocido la realidad de la práctica matemática y la demostración tiene distintos grados de validez formal.

Algunas consideraciones finales

En la actualidad en relación con las características de la actividad docente, existe cierta tendencia presente en investigaciones de matemática educativa acerca de la importancia del análisis de los conocimientos y concepciones que poseen los docentes pues se considera que éstas influyen en la manera en que orientan la enseñanza de los contenidos a su cargo. La importancia de estas investigaciones reside en la hipótesis de que sus ideas, valores y fundamentos se reflejan de manera directa en las decisiones pedagógicas. Diversas investigaciones muestran que el docente de matemática enseña de acuerdo a las concepciones que tiene de esta disciplina. Según estas ideas, si la demostración es considerada como una estructura rígida y no modificable que aparece en los libros, la enseñará como algo acabado y que debe ser memorizado por los alumnos. En este caso se hará hincapié en la trascripción de demostraciones. En cambio si considera que los alumnos pueden "hacer matemática", la demostración como contenido matemático adquirirá un perfil de elemento dinámico y modificable desde el punto de vista didáctico pudiendo adaptarse a la situación escolar presentada. La escritura propia de demostraciones cobrará en este caso gran importancia, ya que se valorará en los alumnos la adquisición de formas propias de argumentación para defender sus propias convicciones. Para esta postura, que compartimos, la matemática se basa en la recolección de datos, realización de conjeturas, en la determinación de si las mismas son válidas o no y, en la formulación y validación de las conclusiones correspondientes.

Referencias bibliográficas

Arsac, G. (1987). *El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 8(3), 267-312.

Boyer, K. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Universidad.

Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo*. Tesis de Maestría sin publicar. CICATA del IPN, México.

Crespo Crespo, C. y Farfán Márquez, R. (2005). *Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural.* Relime Vol. 8 (3), pp.287-317.

Eggers Lan, C. (1995). *El nacimiento de la matemática griega*. Buenos Aires: EUDEBA.

Gheverghese Joseph, G. (1996). *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid: Pirámide.

Ifrah, G. (1997). *Historia de las cifras*. Madrid: Espasa.

Toranzos, F. I. (1943). *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*. Buenos Aires: Espasa Calpe Argentina.